УДК 519.634

СХОДИМОСТЬ ИЗМЕНЕННОЙ СХЕМЫ НЬЮТОНА КОГДА ПРОИЗВОДНЫЕ НЕВЯЗОК УРАВНЕНИЙ ЗАМЕНЯЮТСЯ НА ЭФФЕКТИВНЫЕ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ МЕТОДОМ ИСКУССТВЕННОГО СВЯЗЫВАНИЯ ПОПРАВОК НЕИЗВЕСТНЫХ В СОСЕДНИХ УЗЛАХ

Ш.Ф. АРАСЛАНОВ

Казанский государственный архитектурно-строительный университет
E-mail ashamil@kpfu.ru

CONVERGENCE OF A MODIFIED NEWTON SCHEME WHEN THE DERIVATIVES OF RESIDUALS ARE REPLACED BY EFFECTIVE ONES DETERMINED BY THE METHOD OF ARTIFICIAL BINDING OF UNKNOWNS' CORRECTIONS AT NEIGHBORING NODES

SH.F. ARASLANOV

Kazan State University of Architecture and Engineering

Аннотация

Итерационный метод Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимости. Однако его применение в классическом виде часто затруднено. Pracht W.E. и другие в 1970-х годах по сути предложили измененный итерационный метод Ньютона для определения поправок давления в ячейках сетки без необходимости решения системы связанных уравнений. Вместо точного вычисления и использования производных по давлениям в соседних ячейках от невязки уравнения неразрывности, они ввели эффективную производную по давлению в рассматриваемой ячейке. Эту производную вычисляли приближенно и называли "relaxation factor". Автор развил этот подход, применив его не только для определения поправок давления, но и плотности, внутренней энергии и скорости при решении трехмерных уравнений Навье-Стокса. Вычисление соответствующих эффективных производных производилось по аналитическим формулам. Их стало возможным получить благодаря искусственному связыванию поправок неизвестных в соседних узлах и ячейках. Сравнение с экспериментом и аналитическими решениями подтвердило правильность и эффективность подхода. Применив его к простейшему случаю одномерных акустических уравнений, в данной работе автор получает итерационную схему, которая, в отличие от схемы классического метода Ньютона, естественно, не сходится за одну итерацию. Обосновывается сходимость итерационной схемы при любом числе Куранта и оценивается скорость сходимости.

Ключевые слова: итерационный метод Ньютона, искусственное связывание поправок, сходимость, метод прогонки.

Summary

Newton iteration method possesses the square convergence rate. However, its application in a classical form is often rather difficult. Pracht W.E. and others in 70s suggested, by the essence, a modified iterative Newton method for determination of corrections of pressure in cells of grid without solving the system of connected equations. Instead of an exact calculation and use of derivatives by pressures in neighboring cells of the residual of the continuity equation, they introduced an effective derivative by pressure in the cell under consideration.This derivative was calculated approximately and called "relaxation factor". The author developed this approach by applying it not only to the determination of corrections of pressure, but also to density, internal energy, and velocity in solving 3D Navier-Stokes equations. The computation of the respective effective derivatives was carried out via analytical formulae. The formulas become available to determine due to an artificial binding of corrections of unknowns at neighboring nodes and cells. Comparison with both experimental data and analytic solutions proved the correctness and efficiency of this approach. Having applied it to a simple case of one-dimensional acoustic equations, in this paper the author obtains the iterative scheme. In contrast to the scheme of classical Newton method, this scheme does not converge within a single iteration.The convergence of this iterative scheme is substantiated for any Courant number as well as the rate of convergence is evaluated.

Key words: Newton iteration method, artificial binding of corrections, convergence, sweep method.

Введение

В работах [1,2] автором был разработан новый метод решения конечно-разностных уравнений Навье-Стокса, основанный на итерационном методе Ньютона и оригинальном подходе для нахождения, так называемых автором, эффективных производных, т.е. эффективных скоростей изменения невязок уравнений по соответствующей неизвестной. Отметим, что идея нахождения приращения (поправки) неизвестной в узле через невязку соответствующего уравнения с обратным знаком, деленной на некоторую эффективную производную от невязки по неизвестной, была взята мною из работы [3], автор Pracht W.E. Там подобный шаг вычисления назывался итерационной схемой Ньютоновского типа (Newton-type iteration scheme). Эффективная производная, называемая в статье „relaxation factor“, определялась численно следующим образом. На начальном шаге итерации задавались одинаковые маленькие поправки давления во всех смещенных узлах, и после соответствующего нахождения скоростей и плотностей, и определения невязок уравнений неразрывности, находились отношения изменений этих невязок к поправке давления. В наших работах [1, 2] для определения эффективных производных поправки неизвестных в соседних узлах и ячейках искусственно связываются между собой и для изменения невязок уравнений получаются аналитические формулы. В [1,2] проводилось численное тестирование метода, сравнение полученного решения с аналитическим. В [2], с некоторыми неточностями и ошибками, и в более простом случае, чем в данной работе, обосновывалась сходимость метода. В данной работе для простейшего случая одномерных акустических уравнений обосновывается сходимость итерационной схемы при любом числе Куранта. Все изложение ведется преимущественно в терминах и на основе работы Самарского А.А. и Попова Ю.П. [4]

1. Одномерные акустические уравнения в лагранжевых массовых координатах

Приведем некоторые результаты из работы [4]. Система уравнений газовой динамики в отсутствии теплопроводности и вязкости для одномерного плоского нестационарного течения в лагранжевых массовых координатах в акустическом приближении, т.е. при условии малости возмущений $|\tilde{p}/p_0| \leqslant 1$, $|\tilde{\rho}/\rho_0| \leqslant 1$, после переобозначения, имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial s}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial v}{\partial s}. \tag{1}$$

Здесь v — возмущение скорости $\tilde{v}$ с противоположным знаком, $v = -\tilde{v}$, или сама скорость с противоположным знаком, если считать начальное распределение скоростей $v_0 = 0$, u пропорционально возмущению давления $\tilde{p}$ от начального p_0, $u = \tilde{p}/a$, a — массовая скорость звука, $a = c_0\rho_0$. $c_0 = \sqrt{\partial p_0/\partial \rho_0}$ — скорость звука адиабатического или изотермического процесса. Будем называть далее v — скорость, u — давлениие. Субстанциональная производная по времени t заменена на частную производную, $s(x,t) = \int\limits_{x_0(t)}^{x} \rho(y,t)dy$ — лагранжевая массовая координата, измеряемая от плоского сечения, движущегося вместе с газом. Эйлерова координата этого сечения $x_0 = x_0(t)$, может изменяться со временем от нулевого значения при $t = 0$, в соответствии с законом движения газа.

Задача Коши для приведенных уравнений акустики решается в области $-\infty < s < \infty$, $t > 0$ и удовлетворяет начальным условиям

$$v(s,0) = v_0(s), \quad u(s,0) = u_0(s), \quad -\infty < s < \infty. \tag{2}$$

Семейство разностных схем с весовыми множителями или, иначе, параметрами неявности α и β, аппроксимирующих эту дифференциальную задачу и начальные условия, приводим согласно [4], переписав их с помощью невязок

$$Q_v \equiv v_i^{j+1} - v_i^j - \gamma[(1-\alpha)(u_i^j - u_{i-1}^j) + \alpha(u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1})], \;\; Q_v = 0. \tag{3}$$

$$Q_u \equiv u_i^{j+1} - u_i^j - \gamma[(1-\beta)(v_{i+1}^j - v_i^j) + \beta(v_{i+1}^{j+1} - v_i^{j+1})], \;\; Q_u = 0. \tag{4}$$

$$v_i^0 = v_0(s_i), \;\; u_i^0 = u_0(s_i), \;\; i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{5}$$

Здесь число Куранта $\gamma = a\tau/h$, $h = s_{i+1} - s_i$, $\tau = t_{j+1} - t_j$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \; j = 0, 1, \ldots$ Сеточные значения давления u_i^j относятся к полуцелым точкам по пространству и целым точкам по времени $(s_{i+1/2}, t_j)$. Сеточные значения скорости v_i^j относятся к целым точкам (s_i, t_j).

Аппроксимация дифференциальных уравнений (1), (2) разностными схемами (3), (4) имеет, как минимум, первый порядок по шагам h и τ.

2. Обоснование сходимости разностных схем Самарским А.А. и Поповым Ю.П. [4]

Энергетический метод для разностных схем (3)-(5) для финитных функций начальных условий $u_0(s_i)$ и $v_0(s_i)$, т.е. обращающихся в нуль при достаточно большом $|s_i|$, позволяет авторам [4] для полностью консервативных схем, когда $\beta = 0.5$, $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1$ доказать устойчивость разностной схемы по начальным данным. Авторы [4], „чтобы избежать излишней громоздкости в выкладках“, для сеточной функции давления u исключили полуцелые временные слои и использовали целые. Они замечают, что „очевидно, все полученные результаты автоматически переносятся и на случай с временными слоями $t_{j+1/2}$“.

3. Итерационный метод и его сходимость

Покажем далее, что наш итерационный метод для разностных схем (3), (4) с любыми $\beta > 0$ и $\alpha > 0$ сходится без накладывания дополнительных ограничений на шаги h и τ. Следовательно, наш итерационный метод для полностью консервативных схем с $\beta = 0.5$, $0.5 \leqslant \alpha \leqslant 1$ дает решение, сходящееся к решению дифференциальной задачи при измельчении шагов h и τ.

Построим в соответствии с нашим методом на основе итерационной схемы Ньютона другую итерационную схему, не требующую решения связанной системы уравнений и докажем затем ее сходимость. Будем считать, что мы знаем величины v_i^j, u_i^j для всех i. Значения v_i^{j+1}, u_i^{j+1} таковы, что уравнения (3), (4) выполнены точно. Эти значения будем находить итерационно. Также как в [4] обозначим значения v_i^{j+1}, u_i^{j+1} на k-ой итерации через v_i^k, u_i^k соответственно. В качестве начальных приближений для времени $t + \tau$ возьмем значения в момент t

$$v_i^0 = v_i^j, \quad u_i^0 = u_i^j.$$

Последующие приближения будем находить с помощью итерационной процедуры Ньютоновского типа

$$v_i^{k+1} = v_i^k - \frac{Q_v^k}{\partial Q_v / \partial v_i^{j+1}}, \tag{6}$$

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \frac{Q_u^k}{\partial Q_u / \partial u_i^{j+1}}. \tag{7}$$

Здесь Q_v^k и Q_u^k получаются из выражений для Q_v и Q_u в формулах (3), (4) заменой v_i^{j+1}, u_i^{j+1} на v_i^k, u_i^k для всех i. Если по (6) мы сначала определим v_i^{k+1} для всех i, то вместо (7) можно использовать

$$u_i^{k+1} = u_i^k - \frac{Q_u^{k,k+1}}{\partial Q_u / \partial u_i^{j+1}}, \tag{8}$$

где $Q_u^{k,k+1}$ получаются из выражения для Q_u в формуле (4) заменой v_i^{j+1}, u_i^{j+1} на v_i^{k+1}, u_i^k для всех i.

Исследуемая нами задача и применение для ее решения итерационного метода Ньютоновского типа отличаются от исследований Самарского А.А. и Попова Ю.П. в [4]. Они применяют и исследуют на сходимость классический итерационный метод Ньютона с последующей прогонкой для решения не уравнений акустики, как мы, а для решения более сложных уравнений газовой динамики, для которых получены полностью консервативные схемы при значении весовых множителей таких, которые соответствуют для уравнений акустики параметрам $\beta = 0.5$, $\alpha \geqslant 0.5$. Кроме того, они исследуют краевую задачу Коши с граничными условиями на концах интервала $[0, M]$ лагранжевой координаты s. У нас область с бесконечными границами и мы не используем прогонку, поскольку в нашем методе не требуется решать систему взаимосвязанных уравнений.

Отметим существенное отличие нашего подхода при получении формул (6), (7), (8) от приведенного у Самарского А.А. и Попова Ю.П. в [4] при использовании итерационного метода Ньютона. У них формулы записаны точно в соответствии с традиционным методом Ньютона, а у нас при получении формул использовано приближение.

В этих наших формулах, величины $\partial Q_v/\partial v_i^{j+1}$ и $\partial Q_u/\partial u_i^{j+1}$, с формальной точки зрения, обозначенные как частные производные от Q_v и Q_u, в действительности, будут пониматься нами как некие коэффициенты, при нахождении которых, и в самом деле, берутся частные производные по переменным v_i^{j+1}, u_i^{j+1}, в явном виде входящим в выражения для Q_v и Q_u. Но они (коэффициенты) также могут содержать составляющие, обязанные переменным $v_{i'}^{j+1}$, $u_{i'}^{j+1}$, $i' \neq i$, изменение которых мы, по тем или иным соображениям, искусственно связываем с изменением переменных v_i^{j+1}, u_i^{j+1}. В традиционном итерационном методе Ньютона, уравнения для неизвестных, которые необходимо использовать на каждой итерации, оказываются связанными между собой за счет вхождения неизвестных в разных соседних узлах. Такие уравнения не могут решаться отдельно. Так уравнения (3), (4) при использовании традиционного итерационного метода Ньютона дадут

$$\frac{\partial Q_v^k}{\partial v_i^{j+1}}(v_i^{k+1} - v_i^k) + \frac{\partial Q_v^k}{\partial u_i^{j+1}}(u_i^{k+1} - u_i^k) + \frac{\partial Q_v^k}{\partial u_{i-1}^{j+1}}(u_{i-1}^{k+1} - u_{i-1}^k) = -Q_v^k,$$

$$\frac{\partial Q_u^k}{\partial u_i^{j+1}}(u_i^{k+1} - u_i^k) + \frac{\partial Q_u^k}{\partial v_{i+1}^{j+1}}(v_{i+1}^{k+1} - v_{i+1}^k) + \frac{\partial Q_u^k}{\partial v_i^{j+1}}(v_i^{k+1} - v_i^k) = -Q_u^k,$$

т.е.

$$(v_i^{k+1} - v_i^k) - \gamma\alpha(u_i^{k+1} - u_i^k) + \gamma\alpha(u_{i-1}^{k+1} - u_{i-1}^k) = -Q_v^k, \tag{9}$$

$$(u_i^{k+1} - u_i^k) - \gamma\beta(v_{i+1}^{k+1} - v_{i+1}^k) + \gamma\beta(v_i^{k+1} - v_i^k) = -Q_u^k. \tag{10}$$

Если из первого уравнения в точке i выразить v_i^{k+1} через u_i^{k+1} и u_{i-1}^{k+1}, и из этого же уравнения в соседней точке $i+1$ выразить v_{i+1}^{k+1} через u_{i+1}^{k+1} и u_i^{k+1}, подставить замены во второе уравнение, то получим систему трехточечных разностных уравнений, каждое включающее u_i^{k+1}, u_{i-1}^{k+1} и u_{i-1}^{k+1}. Для решения такой системы обычно применяют метод прогонки. Этот метод может быть не применим в случаях, когда рассматриваются более сложные уравнения или трехмерные по пространству задачи. Кроме того, в методе прогонки, чтобы вычислить неизвестную в точке, необходимо использовать значения неизвестных во всех точках, тогда как, во многих нестационарных задачах газовой динамики на значение неизвестной в точке влияют значения неизвестных в точках, расположенных не слишком далеко.

Мы действуем иначе. Заранее решаем для себя, от каких неизвестных зависит соответствующая невязка, и находим приближенно производные от нее по этим неизвестным. Например, при получении (6) и (7), мы считали, что в (3) Q_v зависит от v_i^{j+1}, а в (4) Q_u зависит от u_i^{j+1}. Нашему методу не противоречило бы и отличающееся предположение, что каждое Q_v и Q_u зависят от v_i^{j+1} и от u_i^{j+1}. В этом случае для определения двух поправок пришлось бы решать систему двух линейных уравнений. Это была бы другая разновидность нашего изменения итерационного метода Ньютона, которую здесь не рассматриваем!

Найдем $\partial Q_u/\partial u_i^{j+1}$. Для этого из (4) свяжем δQ_u, т.е. изменение невязки Q_u, с δu_i^{j+1}, т.е. изменением u_i^{j+1}. Здесь δu_i^{j+1} пока просто любое изменение u_i^{j+1}. Можно назвать его приращением или поправкой, которую надо добавить к u_i^{j+1}, чтобы получить более точное значение u_i^{j+1}, если оно было определено неточно. При этом будем считать, что уравнение (3) выполнено и для v_i^{j+1} и для $v_i^{j+1} + \delta v_i^{j+1}$

для всех i. То есть будем считать, что приращение δu_i^{j+1} вызывает такое приращение δv_i^{j+1}, что уравнение (3) выполняется для $v_i^{j+1} + \delta v_i^{j+1}$. Поэтому $\delta Q_v = 0$, откуда следует

$$\delta v_i^{j+1} = \gamma\alpha(\delta u_i^{j+1} - \delta u_{i-1}^{j+1}). \tag{11}$$

Из выражения для Q_u в формуле (4) получим

$$\delta Q_u = \delta u_i^{j+1} - \gamma\beta(\delta v_{i+1}^{j+1} - \delta v_i^{j+1}). \tag{12}$$

Свяжем приращения неизвестных в соседних узлах между собой, т.е. вместо истинных и неопределенных заранее зависимостей неизвестных, введем искусственные

$$\delta u_{i+1}^{j+1} = \omega(i,i+1)\delta u_i^{j+1}, \quad \delta u_{i-1}^{j+1} = \omega(i,i-1)\delta u_i^{j+1}. \tag{13}$$

Тогда, выразив δv_i^{j+1} и δv_{i+1}^{j+1} с помощью формулы (11) через δu_i^{j+1}, δu_{i+1}^{j+1} и δu_{i-1}^{j+1} и используя (13), перепишем (12)

$$\delta Q_u = \delta u_i^{j+1}\left[1 + 2\gamma^2\alpha\beta\left(1 - \frac{\omega(i,i+1) + \omega(i,i-1)}{2}\right)\right].$$

Примем $\omega(i,i+1)$ и $\omega(i,i-1)$ постоянными величинами не зависящими от i и равными ω_{u0}, тогда

$$\delta Q_u = \delta u_i^{j+1}[1 + 2\gamma^2\alpha\beta(1 - \omega_{u0})].$$

В качестве $\partial Q_u/\partial u_i^{j+1}$ в формуле (7) возьмем $\delta Q_u/\delta u_i^{j+1}$, получим

$$\partial Q_u/\partial u_i^{j+1} = 1 + 2\gamma^2\alpha\beta(1 - \omega_{u0}). \tag{14}$$

Это же соотношение аналогичными рассуждениями можно получить из (9), (10), если искусственно связать поправки $u_{i+1}^{k+1} - u_{i+1}^k$ и $u_{i-1}^{k+1} - u_{i-1}^k$ с $u_i^{k+1} - u_i^k$ как в (13).

Аналогично получим для $\partial Q_v/\partial v_i^{j+1}$ в формуле (6)

$$\partial Q_v/\partial v_i^{j+1} = 1 + 2\gamma^2\alpha\beta(1 - \omega_{v0}). \tag{15}$$

Для итерационной схемы (6), (7) с коэффициентами (14), (15) при $\omega_{u0} = \omega_{v0} = \omega_0 \leqslant 1$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ нам не удалось показать сходимость. Численный эксперимент, правда, уже для соответствующих разностных трехмерных уравнений Навье-Стокса, показывает, что сходимость отсутствует. Для итерационной схемы (6), (8) с теми же коэффициентами (14), (15) численный эксперимент показывает, что сходимость наблюдается только при маленьком $\gamma \sim 1$.

Обоснуем сходимость другой итерационной схемы, когда используем формулы (6) и (8), $\partial Q_u/\partial u_i^{j+1}$ определяем, как и раньше, по формуле (14), но коэффициент $\partial Q_v/\partial v_i^{j+1}$ теперь берем равным 1, т.е. формально, по формуле (15) при $\omega_{v0} = 1$. Для этого, как в [4], введем следующие обозначения погрешностей

$$\delta u_i^k = u_i^k - u_i^{j+1}, \quad \delta v_i^k = v_i^k - v_i^{j+1},$$

и нормы

$$\| \delta u^k \|_c = \max_i |\delta u_i^k|, \quad \| \delta v^k \|_c = \max_i |\delta v_i^k|.$$

Вычитая в уравнении (8) из левой и правой частей величину u_i^{j+1} и заменяя $Q_u^{k,k+1}$ на $Q_u^{k,k+1} - Q_u$, где Q_u определяется формулой (4) и равно нулю, получим

$$\delta u_i^{k+1} = \frac{2\gamma^2\alpha\beta(1-\omega_{u0})\delta u_i^k + \gamma\beta(\delta v_{i+1}^{k+1} - \delta v_i^{k+1})}{1 + 2\gamma^2\alpha\beta(1 - \omega_{u0})}. \tag{16}$$

Вычитая в уравнении (6) из левой и правой частей величину v_i^{j+1} и заменяя Q_v^k на $Q_v^k - Q_v$, где Q_v определяется формулой (3) и равно нулю, получим

$$\delta v_i^{k+1} = \gamma\alpha(\delta u_i^k - \delta u_{i-1}^k). \tag{17}$$

Увеличив индекс i на 1, получим $\delta v_{i+1}^{k+1} = \gamma\alpha(\delta u_{i+1}^k - \delta u_i^k)$, и вычитая (17), найдем

$$\delta v_{i+1}^{k+1} - \delta v_i^{k+1} = \gamma\alpha(\delta u_{i+1}^k - 2\delta u_i^k + \delta u_{i-1}^k),$$

что после подстановки в (16) даст

$$\delta u_i^{k+1} = \frac{\gamma^2\alpha\beta(\delta u_{i+1}^k + \delta u_{i-1}^k - 2\omega_{u0}\delta u_i^k)}{1 + 2\gamma^2\alpha\beta(1 - \omega_{u0})}. \tag{18}$$

Если при $\omega_{u0} \leqslant 1$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ из (18) получить оценку в виде неравенства для абсолютных величин погрешностей, заменить в правой части неравенства абсолютные величины нормой, а затем в левой части неравенства, учитывая, что правая часть от i не зависит, выбрать i, соответствующее максимуму абсолютной величины, т.е. норме, то получим

$$\| \delta u^{k+1} \|_c \leqslant \frac{2\gamma^2\alpha\beta(1+ \mid \omega_{u0} \mid)}{2\gamma^2\alpha\beta(1 - \omega_{u0}) + 1} \| \delta u^k \|_c \,. \tag{19}$$

Введем величину λ

$$\lambda = \frac{2\gamma^2\alpha\beta(1+ \mid \omega_{u0} \mid)}{2\gamma^2\alpha\beta(1 - \omega_{u0}) + 1}.$$

Тогда из (19) следует

$$\| \delta u^{k+1} \|_c \leqslant \lambda \| \delta u^k \|_c \leqslant \ldots \leqslant \lambda^{k+1} \| \delta u^0 \|_c \,. \tag{20}$$

Из (17) получим

$$\| \delta v^{k+1} \|_c \leqslant 2\gamma\alpha \| \delta u^k \|_c,$$

и с учетом (20)

$$\| \delta v^{k+1} \|_c \leqslant 2\gamma\alpha\lambda^k \| \delta u^0 \|_c \,. \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что при $\omega_{u0} \leqslant 0$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, когда $\lambda < 1$, наша итерационная схема сходится при любых γ, а следовательно, при любых шагах h и τ. Очевидно, что сходимость линейная, а не квадратичная как в классическом итерационном методе Ньютона.

4. Сравнение нашего итерационного метода с другими методами решения системы разностных уравнений

Самарский А.А. и Попов Ю.П. [4] для $\alpha = 1$ и $\beta = 0.5$ получили достаточное условие сходимости обычной итерационной схемы решения разностных уравнений акустики (3), (4), (5). Это условие $0 < \gamma \leqslant 1/\sqrt{2}$, как замечают они, является необходимым и налагает довольно жесткое ограничение на шаги схемы. Далее они исследовали, как я упоминал в предыдущем пункте, сходимость итерационного метода Ньютона для решения не уравнений акустики, а разностных уравнений газовой динамики идеального газа (изотермический случай) с граничными условиями на концах конечного интервала $[0, M]$. Из системы полученных разностных соотношений, исключая все функции кроме приращения функции удельного объема $\delta\eta_i^{k+1} = 1/\rho_i^{k+1} - 1/\rho_i^k$, они получают систему трехточечных уравнений для $\delta\eta_i^{k+1}$, которую решают методом прогонки. Их метод сходится без накладывания дополнительных ограничений на шаги h и τ, кроме ограничения на шаг сетки по времени τ, определяемого скоростью изменения функций во времени.

Самарский А.А. и Попов Ю.П. [4] в своем доказательстве продемонстрировали, что рассматриваемый ими „итерационный процесс является квадратичным, как это и должно быть для метода Ньютона“. Наше доказательство сходимости итерационного метода для задачи Коши на бесконечном интервале демонстрирует, что процесс сходимости в нашем методе является, к сожалению, линейным, как это видно из формул (20), (21). Причина в замене системы связанных уравнений для определения поправок на систему уравнений, в каждом из которых остается одна неизвестная поправка в узле, в котором вычисляется соответствующая невязка уравнения. Произведение коэффициента или как мы называем эффективной производной на единственную оставшуюся поправку никак не может быть равно сумме произведений истинных производных метода Ньютона на поправки в рассматриваемом узле и соседних с ним. Для простоты, влияние погрешности замен можно продемонстрировать не для системы уравнений, а для одного алгебраического уравнения $f(x) = 0$, если заменить единственную, в данном случае, истинную производную на другую. Если $f(x) = x^2 - 1$, и мы принимаем нулевое приближение $x_0 = 2 = 1 + 1$ - сумма решения и отклонения (погрешности), то поправка на k-ой итерации будет $x_{k+1} - x_k$, поэтому $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/(2x_k) = 1 + (x_k - 1)^2/(2x_k)$, при точном, в соответствии с методом Ньютона, значении производной, равной $2x_k$. Изменим производную. Достаточно, если вместо того, чтобы на каждой итерации пересчитывать производную, не будем этого делать. То есть, фактически мы будем брать увеличенное значение производной, а именно равное $f'(x_0) = 2x_0 = 4$. Тогда $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/4 = 1 + (x_k - 1)[2 - (x_k - 1)]/4$, и мы убеждаемся, что процесс сходимости к $x = 1$ из квадратичного превратился в линейный.

5. Заключение

Pracht W.E. [3] и другие в 1970-х годах предложили измененный итерационный метод Ньютона (Newton-type iteration scheme), который развил автор в работах [1, 2]. Предложение автора искусственно связывать поправки неизвестных в соседних узлах и ячейках позволило получать различные итерационные схемы Ньютоновского типа и формулы для вычисления, так называемых автором эффективных производных от невязок уравнений по неизвестным в рассматриваемом узле или ячейке. Применение этого подхода к решению трехмерных уравнений Навье-Стокса [1, 2] показало эффективность предложенного метода. Причем сходимость схемы и достоверность результатов подтвердилась сравнением численных расчетов с экспериментальными и аналитическими решениями. Автор обходился тогда без теоретических исследований сходимости.

Однако попытки применить этот подход к решению задач о трехмерных течениях индуктивно-связанной плазмы с одновременным расчетом электромагнитных полей не привели к успеху. Слишком много вариантов итерационных схем возникало. Численные эксперименты показали неэффективность исследованных схем для решения одновременно и уравнений Навье-Стокса и уравнений для электромагнитного поля. Поэтому было решено теоретически исследовать сходимость итерационных схем, получаемых автором согласно придуманному им методу искусственного связывания поправок неизвестных в соседних узлах.

Поскольку, как было сказано, для уравнений Навье-Стокса применение метода показалось эффективным [1, 2] , то автор старался исследовать сходимость для уравнений, максимально близких к уравнениям Навье-Стокса. Пока что, удалось в данной работе только для простейшего случая одномерных акустических уравнений обосновать сходимость итерационной схемы при любом числе Куранта. При этом схема была составлена близкой к схеме сделанной для уравнений Навье-Стокса. Следует отметить, что наш метод не является методом Ньютона в классическом виде. Метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости и для случая одномерных акустических уравнений сходится за одну итерацию. Это не означает, что исследовать условия сходимости нашего метода для уравнений акустики нецелесообразно, так как наша схема, как и натолкнувшая нас на нее схема типа Ньютона работы [3], не являются чисто Ньютоновскими, а основаны на методе Ньютона и имеют преимущество в том, что упрощается система уравнений по сравнению с тем, что дает классический метод Ньютона. Для случая одномерных акустических уравнений можно применить эффективный алгоритм прогонки, что и делает класический метод Ньютона эффективным также. Но не для всех задач возможно применить прогонку. Можно отметить, что в методе прогонки также искусственно связываются неизвестные в соседних узлах. Только в этом методе связь задается через коэффициенты, которые определяются из рекуррентных формул, а в нашем методе связывающие коэффициенты задаются искусственно. Можно попытаться развить наш метод, также определяя связывающие коэффициенты из системы уравнений, а не задавая их. Можно попытаться усовершенствовать метод так, чтобы его применение для решения одномерных акустических уравнений давала сходимость более близкую к квадратичному закону.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Araslanov Sh.F.** Artificial relations between quantities at nearest nodes or cells and the Newton iteration procedure for the modified pressure correction method // Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences. — 2004. — V. 11, № 2—3. — P. 167—195.
2. **Araslanov Shamil F.** New Method for Solving the Navier-Stokes Equations with Artificial Relations Between Variations of Quantities, Applied at Nearest Nodes // CD Proc. European Conference on Comput. Fluid Dynamics ECCOMAS 2006, Egmond aan Zee, The Netherlands, 5-8 September 2006.
3. **Pracht W.E.** Calculating three-dimensional fluid flows at all speeds with an eulerian-lagrangian computing mesh // J. Computational Phys. — 1975. — V. 17. — P. 132—159.
4. **Самарский А.А., Попов Ю.П.** Разностные схемы газовой динамики. — М: Наука, 1975. — 352 с.

REFERENCES

1. **Araslanov Sh.F.** Artificial relations between quantities at nearest nodes or cells and the Newton iteration procedure for the modified pressure correction method // Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences. — 2004. — V. 11, № 2—3. — P. 167—195.
2. **Araslanov Shamil F.** New Method for Solving the Navier-Stokes Equations with Artificial Relations Between Variations of Quantities, Applied at Nearest Nodes // CD Proc. European Conference on Comput. Fluid Dynamics ECCOMAS 2006, Egmond aan Zee, The Netherlands, 5-8 September 2006.
3. **Pracht W.E.** Calculating three-dimensional fluid flows at all speeds with an eulerian-lagrangian computing mesh // J. Computational Phys. — 1975. — V. 17. — P. 132—159.
4. **Samarskii A.A., Popov Yu.P.** Finite difference scheme of gas dynamics [Raznostnye skhemy gazovoy dinamiki]. — Moscow: Nauka, 1975. — 352 p.(in Russian)